Teoria regulacji – Ćwiczenia

Kryteria stabilności

Maciej Filiński

1 Stabilność systemów ciągłych

$$K(s) = \frac{L(s)}{M(s)}, \tag{1}$$

gdzie $M(s) = a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \cdots + a_1 s + a_0$

1.1 Twierdzenie o znaku współczynników

Jeśli $a_m > 0$ i system jest stabilny to $a_0 > 0, a_1 > 0, \ldots, a_{m-1} > 0$

UWAGA! Spełnienie kryterium nie świadczy o stabilności systemu, a jedynie pozwala określić jej brak.

Przykłady:

1. System spełnia kryterium - system niestabilny

$$K(s) = \frac{1}{s^3 + 2s^2 + s + 8}, s_1 = -2.72, s_{2,3} = 0.36 \pm 1.68j$$

2. System spełnia kryterium - system stabilny

$$K(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 2} = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$$

3. System nie spełnia kryterium - system niestabilny

$$K(s) = \frac{1}{s^2 - s - 1} = \frac{1}{(s+1)(s-2)}$$

1.2 Kryterium Routha-Hurwitza

$$H_m = \begin{bmatrix} a_{m-1} & a_{m-3} & a_{m-5} & a_{m-7} & \cdots \\ a_m & a_{m-2} & a_{m-4} & a_{m-6} & \cdots \\ 0 & a_{m-1} & a_{m-3} & a_{m-5} & \cdots \\ 0 & a_m & a_{m-2} & a_{m-4} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix} \tag{2}$$

Niech $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_m$ będą głównymi podwyznacznikami macierzy H_m:

$$\begin{aligned} \Delta_1 =& a_{m-1} \\ \Delta_2 =& \begin{vmatrix} a_{m-1} & a_{m-3} \\ a_m & a_{m-2} \end{vmatrix} \\ \Delta_3 =& \begin{vmatrix} a_{m-1} & a_{m-3} & a_{m-5} \\ a_m & a_{m-2} & a_{m-4} \\ 0 & a_{m-1} & a_{m-3} \end{vmatrix} \\ &\vdots \\ \Delta_m =& \det H_m = a_0 \det \Delta_{m-1}. \end{aligned}$$

Jeśli $\Delta_1 \neq 0, \Delta_2 \neq 0, \ldots, \Delta_m \neq 0$ to żaden z pierwiastków wielomianu $M(s)$ nie leży na osi $j\omega$ oraz

$$m_+ = V(a_m, \Delta_1, \frac{\Delta_2}{\Delta_1}, \ldots, \frac{\Delta_m}{\Delta_{m-1}}),$$

gdzie V oznacza liczbę zmian znaku kolejnych elementów. Więc jeśli $a_m > 0$ oraz $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \ldots, \Delta_m > 0$ to system jest stabilny.

UWAGA! Jeśli któryś podwyznacznik jest równy 0 to kryterium nie rozstrzyga.

Przykłady:

1. System spełnia kryterium - system niestabilny (dwa pierwiastki na prawej półpłaszczyźnie)

$$K(s) = \frac{1}{s^3 + 2s^2 + s + 8}$$

$$\Delta_1 = 2$$

$$\Delta_2 = -6$$

$$\Delta_3 = -42$$

$$V(1, 2, -\frac{1}{3}, \frac{1}{8}) = 2$$

2. System spełnia kryterium - system stabilny

$$K(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 2} = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$$

$$\Delta_1 = 3$$

$$\Delta_2 = 6$$

3. System nie spełnia kryterium - system niestabilny (jeden pierwiastek na prawej półpłaszczyźnie)

$$K(s) = \frac{1}{s^2 - s - 1} = \frac{1}{(s+1)(s-2)}$$

$$\Delta_1 = -1$$

$$\Delta_2 = 1$$

$$V(1, -1, -1) = 1$$

1.3 Kryterium Michajłowa

Niech $a_m > 0$. System jest stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy

$$M(j\omega) \neq 0, \text{dla wszystkich } \omega \in [0, \infty), \tag{3}$$

oraz

$$\Delta \arg_{0 \leqslant \omega < \infty} M(j\omega) = m\frac{\pi}{2} \tag{4}$$

Przykłady:

1. Dana jest transmitancja:

$$K(s) = \frac{1}{s^3 + 2s^2 + s + 2}$$

$$\begin{aligned} M(j\omega) &= (j\omega)^3 + 2(j\omega)^2 + j\omega + 2 \\ &= -j\omega^3 - 2\omega + j\omega + 2 \\ &= (2 - 2\omega^2) + j(\omega - \omega^3) \end{aligned}$$

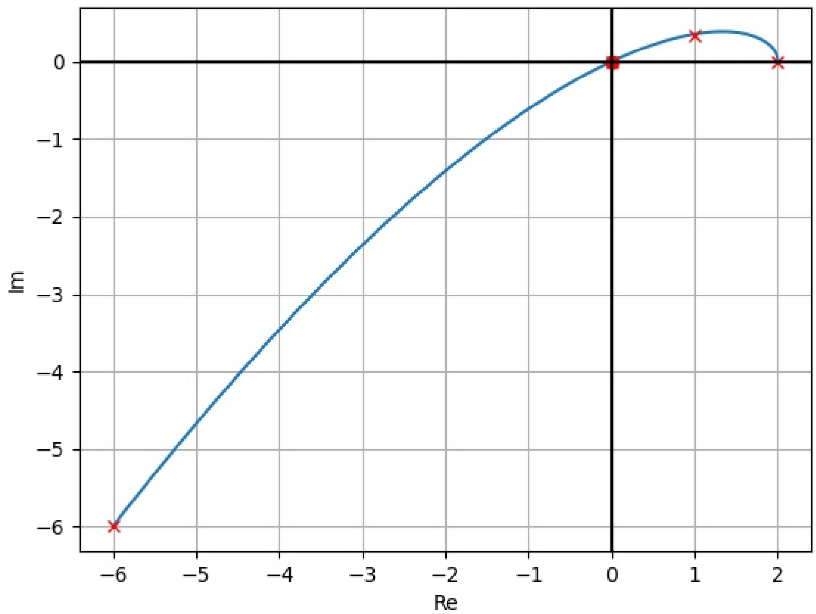
Wyznaczamy punkty przecięcia (można wyznaczyć również inne punkty)

$$Re(M(j\omega)) = 0 \rightarrow \omega_1 = 1, \omega_2 = -1$$

$$Im(M(j\omega)) = 0 \rightarrow \omega_1 = 0, \omega_2 = 1, \omega_3 = -1$$

ω	Re	Im
0	2	0
$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{3}$
1	0	0
2	-6	-6

Na podstawie punktów wyznaczamy charakterystykę



Na podstawie charakterystyki stwierdzamy, że system jest niestabilny (przecięcie w punkcie $(0, 0)$).

2. Dana jest transmitancja:

$$K(s) = \frac{1}{s^3 + 2s^2 + 3s + 4}$$

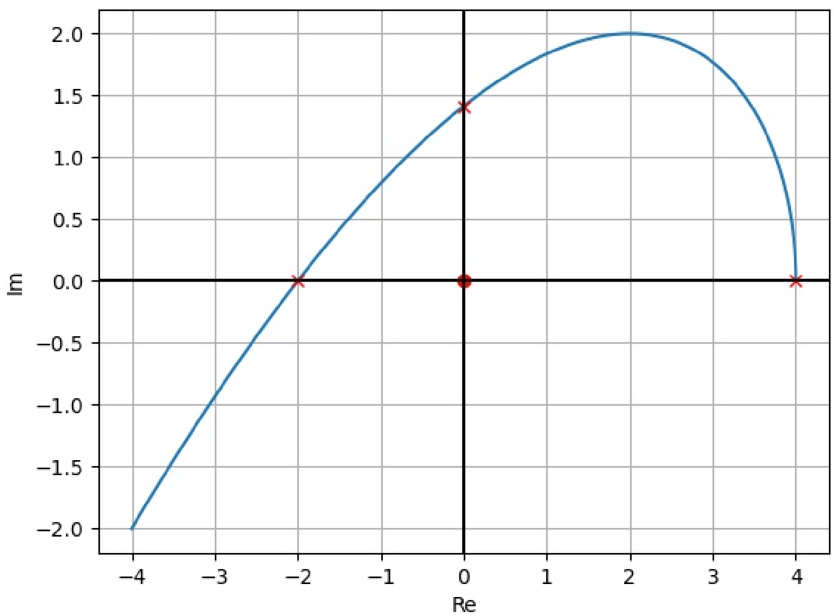
$$\begin{aligned} M(j\omega) &= (j\omega)^3 + 2(j\omega)^2 + 3j\omega + 4 \\ &= -j\omega^3 - 2\omega + 3j\omega + 4 \\ &= (4 - 2\omega^2) + j(3\omega - \omega^3) \end{aligned}$$

Wyznaczamy punkty przecięcia (można wyznaczyć również inne punkty)

$$Re(M(j\omega)) = 0 \rightarrow \omega_1 = \sqrt{2}, \omega_2 = -\sqrt{2}$$
$$Im(M(j\omega)) = 0 \rightarrow \omega_1 = 0, \omega_2 = \sqrt{3}, \omega_3 = -\sqrt{3}$$

ω	Re	Im
0	4	0
$\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$
$\sqrt{3}$	-2	0

Na podstawie punktów wyznaczamy charakterystykę



Na podstawie charakterystyki stwierdzamy, że system jest stabilny, bo przechodzi przez 3 kolejne ćwiartki

3. Dana jest transmitancja:

$$K(s) = \frac{1}{s^3 + 2s^2 + s + 8}$$

$$\begin{aligned} M(j\omega) &= (j\omega)^3 + 2(j\omega)^2 + j\omega + 8 \\ &= -j\omega^3 - 2\omega + j\omega + 8 \\ &= (8 - 2\omega^2) + j(\omega - \omega^3) \end{aligned}$$

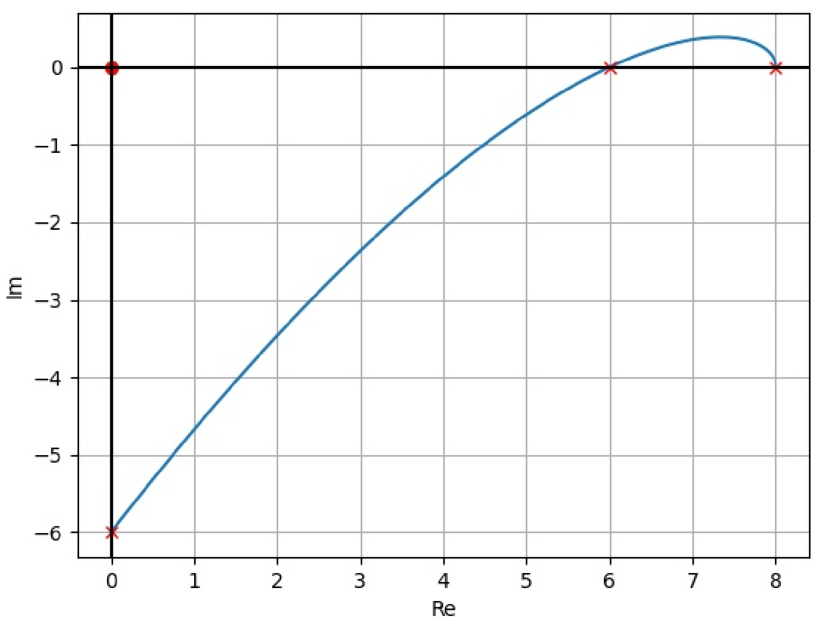
Wyznaczamy punkty przecięcia (można wyznaczyć również inne punkty)

$$Re(M(j\omega)) = 0 \rightarrow \omega_1 = 2, \omega_2 = -2$$

$$Im(M(j\omega)) = 0 \rightarrow \omega_1 = 0, \omega_2 = 1, \omega_3 = -1$$

ω	Re	Im
0	8	0
1	6	0
2	0	-6

Na podstawie punktów wyznaczamy charakterystykę



Na podstawie charakterystyki stwierdzamy, że system jest niestabilny, bo zmiana argumentu jest ujemna równa $-\frac{\pi}{2}$

1.4 Kryterium Nyquista (dla systemów zamkniętych)

Niech $a_m > 0$ i $l < m$.

1.4.1 System otwarty stabilny

Załóżmy, że system otwarty jest stabilny. System zamknięty jest stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy

$$1 + K(j\omega) \neq 0, \text{dla wszystkich } \omega \in [0, \infty)$$

oraz

$$\Delta \arg_{0 \leqslant \omega < \infty} [1 + K(j\omega)] = 0$$

Przykłady:

1. Dana jest transmitancja:

$$K(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 1}$$

$$\begin{aligned} K(j\omega) &= \frac{1}{(j\omega)^2 + 2j\omega + 1} \\ &= \frac{1}{-\omega^2 + 2j\omega + 1} \\ &= \frac{1}{(1-\omega^2) + j(2\omega)} \\ &= \frac{1}{(1-\omega^2) + j(2\omega)} \frac{(1-\omega^2) - j(2\omega)}{(1-\omega^2) - j(2\omega)} \\ &= \underbrace{\frac{1-\omega^2}{(1-\omega^2)^2 + 4\omega^2}}_{P(\omega)} + j \underbrace{\frac{-2\omega}{(1-\omega^2)^2 + 4\omega^2}}_{Q(\omega)} \end{aligned}$$

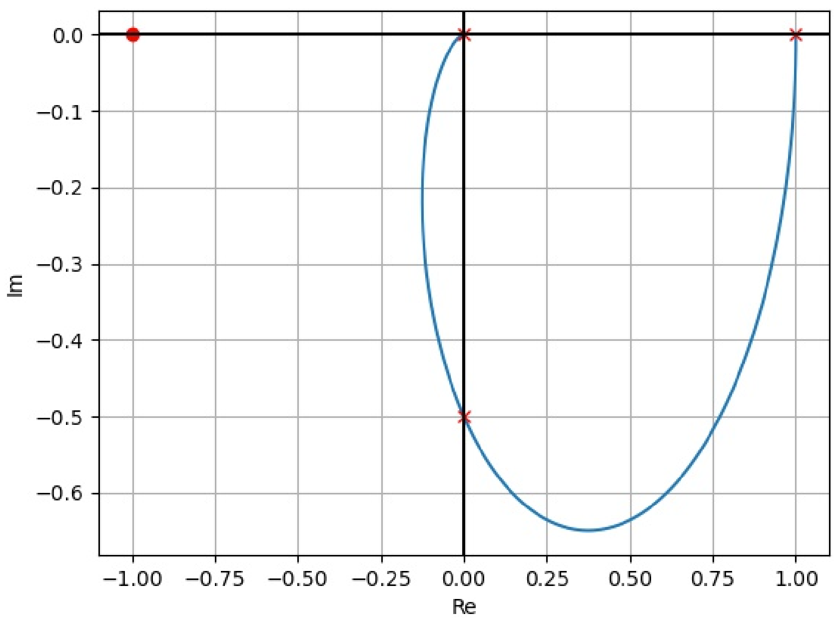
Wyznaczamy punkty przecięcia (można wyznaczyć również inne punkty)

$$P(\omega) = 0 \rightarrow \omega_1 = 1, \omega_2 = -1$$

$$Q(\omega) = 0 \rightarrow \omega_1 = 0$$

ω	$P(\omega)$	$Q(\omega)$
0	1	0
1	0	$-\frac{1}{2}$
∞	0	0

Na podstawie punktów wyznaczamy charakterystykę



Na podstawie charakterystyki stwierdzamy, że system jest stabilny, bo zmiana argumentu jest równa 0.

2. Dana jest transmitancja:

$$K(s) = \frac{40}{s^3 + 5s^2 + 8s + 4}$$

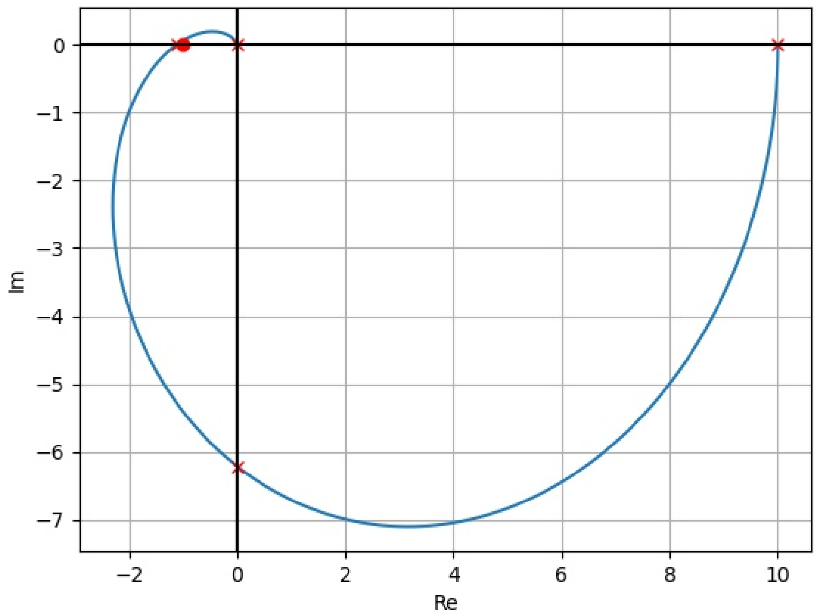
$$
\begin{aligned}
K(j\omega) &= \frac{40}{(j\omega)^3 + 5(j\omega)^2 + 8j\omega + 4} \\
&= \frac{40}{-j\omega^3 - 5\omega^2 + 8j\omega + 4} \\
&= \frac{40}{(4-5\omega^2) + j(8\omega - \omega^3)} \\
&= \frac{40}{(4-5\omega^2) + j(8\omega - \omega^3)} \frac{(4-5\omega^2) - j(8\omega - \omega^3)}{(4-5\omega^2) - j(8\omega - \omega^3)} \\
&= \underbrace{\frac{40(4-5\omega^2)}{(4-5\omega^2)^2 + (8\omega - \omega^3)^2}}_{P(\omega)} + j \underbrace{\frac{-40(8\omega - \omega^3)}{(4-5\omega^2)^2 + (8\omega - \omega^3)^2}}_{Q(\omega)}
\end{aligned}
$$

Wyznaczamy punkty przecięcia (można wyznaczyć również inne punkty)

$$
\begin{aligned}
P(\omega) = 0 \rightarrow \omega_1 = \frac{2\sqrt{5}}{5}, \omega_2 = -\frac{2\sqrt{5}}{5} \\
Q(\omega) = 0 \rightarrow \omega_1 = 0, \omega_2 = 2\sqrt{2}, \omega_3 = -2\sqrt{2}
\end{aligned}
$$

ω	$P(\omega)$	$Q(\omega)$
0	10	0
$\frac{2\sqrt{5}}{5}$	0	$-\frac{25\sqrt{5}}{9}$
$2\sqrt{2}$	$-\frac{10}{9}$	0
∞	0	0

Na podstawie punktów wyznaczamy charakterystykę



Na podstawie charakterystyki stwierdzamy, że system jest niestabilny.

1.4.2 System otwarty niestabilny

Załóżmy, że system otwarty jest niestabilny. System zamknięty jest stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy

$$1 + K(j\omega) \neq 0, \text{dla wszystkich } \omega \in [0, \infty)$$

oraz

$$\Delta \arg_{0 \leqslant \omega < \infty} [1 + K(j\omega)] = m_+ \pi$$

Przykłady:

1. Dana jest transmitancja:

$$K(s) = \frac{1}{s^3 + 5s^2 + 2s - 8}$$

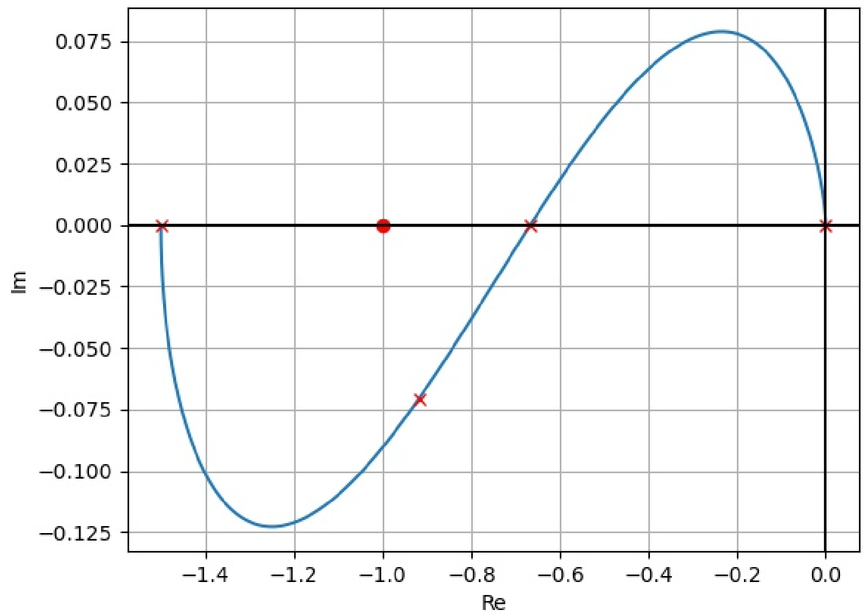
$$
\begin{aligned}
K(j\omega) &= \frac{1}{(j\omega)^3 + 5(j\omega)^2 + 2j\omega - 8} \\
&= \frac{1}{-j\omega^3 - 5\omega^2 + 2j\omega - 8} \\
&= \frac{1}{(-5\omega^2 - 8) + j(2\omega - \omega^3)} \\
&= \frac{1}{(-5\omega^2 - 8) + j(2\omega - \omega^3)} \frac{(-5\omega^2 - 8) - j(2\omega - \omega^3)}{(-5\omega^2 - 8) - j(2\omega - \omega^3)} \\
&= \underbrace{\frac{-5\omega^2 - 8}{(-5\omega^2 - 8)^2 + (2\omega - \omega^3)^2}}_{P(\omega)} - j \underbrace{\frac{2\omega - \omega^3}{(-5\omega^2 - 8)^2 + (2\omega - \omega^3)^2}}_{Q(\omega)}
\end{aligned}
$$

Wyznaczamy punkty przecięcia (można wyznaczyć również inne punkty)

$$
\begin{aligned}
&P(\omega) = 0 \rightarrow \text{brak pierwiastków rzeczywistych} \\
&Q(\omega) = 0 \rightarrow \omega_1 = 0, \omega_2 = \sqrt{2}, \omega_3 = -\sqrt{2}
\end{aligned}
$$

ω	$P(\omega)$	$Q(\omega)$
0	$-\frac{1}{8}$	0
1	$-\frac{13}{170}$	$\frac{1}{170}$
$\sqrt{2}$	$-\frac{1}{18}$	0
∞	0	0

Na podstawie punktów wyznaczamy charakterystykę



Na podstawie charakterystyki stwierdzamy, że system jest stabilny, bo zmiana argumentu jest równa π ($m_+ = 1$).

1.4.3 System otwarty z elementami całkującymi

Załóżmy, że system otwarty ma elementy całkujące. System zamknięty jest stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy

$$1 + K(j\omega) \neq 0, \text{dla wszystkich } \omega \in [0, \infty)$$

oraz

$$\Delta \arg_{0 \leqslant \omega < \infty}[1 + K(j\omega)] = m_0 \frac{\pi}{2},$$

gdzie m_0 to krotność bieguna $s = 0$ oraz $m_0 + m_- = m$ (brak biegunów na prawej półpłaszczyźnie)

Przykłady:

1. Dana jest transmitancja:

$$K(s) = \frac{1}{s^4 + 3s^3 + 3s^2 + s}$$

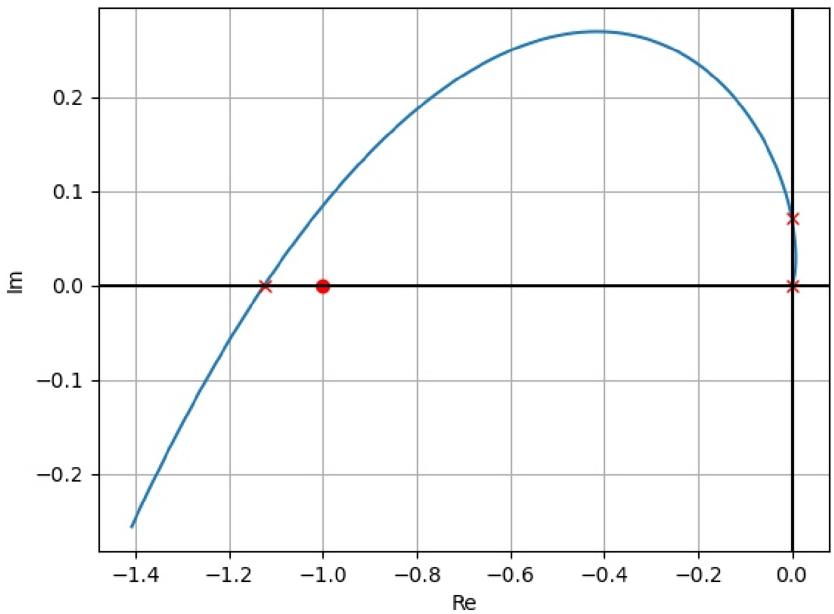
$$
\begin{aligned}
K(j\omega) &= \frac{1}{(j\omega)^4 + 3(j\omega)^3 + 3(j\omega)^2 + j\omega} \\
&= \frac{1}{\omega^4 - 3j\omega^3 - 3\omega^2 + j\omega} \\
&= \frac{1}{(\omega^4 - 3\omega^2) + j(\omega - 3\omega^3)} \\
&= \frac{1}{(\omega^4 - 3\omega^2) + j(\omega - 3\omega^3)} \frac{(\omega^4 - 3\omega^2) - j(\omega - 3\omega^3)}{(\omega^4 - 3\omega^2) - j(\omega - 3\omega^3)} \\
&= \underbrace{\frac{\omega^4 - 3\omega^2}{(\omega^4 - 3\omega^2)^2 + (\omega - 3\omega^3)^2}}_{P(\omega)} + j \underbrace{\frac{-(\omega - 3\omega^3)}{(\omega^4 - 3\omega^2)^2 + (\omega - 3\omega^3)^2}}_{Q(\omega)}
\end{aligned}
$$

Wyznaczamy punkty przecięcia (można wyznaczyć również inne punkty)

$$
\begin{aligned}
P(\omega) = 0 \rightarrow \omega_1 = 0, \omega_2 = \sqrt{3}, \omega_3 = -\sqrt{3} \\
Q(\omega) = 0 \rightarrow \omega_1 = 0, \omega_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}, \omega_3 = -\frac{1}{\sqrt{3}}
\end{aligned}
$$

ω	$P(\omega)$	$Q(\omega)$
0^+	$-\infty$	$-\infty$
$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\frac{9}{8}$	0
$\sqrt{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}-9}{(\sqrt{3}-9)^2}$
∞	0	0

Na podstawie punktów wyznaczamy charakterystykę



Na podstawie charakterystyki stwierdzamy, że system jest niestabilny, bo zmiana argumentu nie jest równa $\frac{\pi}{2}$ $(m_0 = 1)$.