Teoria regulacji – Lista 2*

Transformata Laplace'a i jej własności

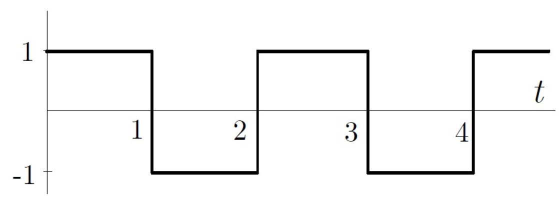
Maciej Filiński

Zadanie 1. Wykazać, że jeśli $f(t)$ jest funkcją okresową o okresie T, to

$$F(s) = \frac{F_T(s)}{1 - e^{-sT}},$$

gdzie $F_T(s) = \int_0^T f(t)e^{-st}dt$. Sprawdzić następnie, że transformata fali prostokątnej przedstawionej na rysunku jest równa

$$F(s) = \frac{(1 - e^{-s})^2}{2(1 - e^{-2s})}.$$



Zadanie 2. Rozwiązać równania różniczkowe stosując transformatę Laplace'a:

a) $y'' + 3y' + y = 0$

b) $y'' + 3y' + y = 1$

c) $y'' + 3y' + y = t$

d) $y'' + 3y' + y = \sin(\omega t)$

e) $y'' + y' - 2y = 0$

f) $y'' + y' - 2y = 1$

g) $y'' + y' - 2y = t$

h) $y'' + 4y' + 4y = 1$

i) $y'' + 4y' + 4y = e^{-3t}$

j) $y'' - 4y' - 2y = \sin(\omega t)$

k) $y'' - 2y' + 2y = 0$

l) $y'' - 2y' + 2y = \cos(\omega t)$

*Na podstawie list Prof. dr hab. Włodzimierza Greblickiego

Zadanie 3. Wyznaczyć $e^{\mathbf{A}t}$, gdzie:

a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}$ d) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ g) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$

b) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ e) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ h) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$

c) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$ f) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$ i) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$

Zadanie 4. Równanie różniczkowe ma postać $y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = 0$. Sprawdzić, że jeśli $\xi(t) = [y(t), y'(t)]^T$ to

$$\dot{\xi}(t) = \mathbf{A}\xi(t),$$

gdzie $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$, a następnie wyznaczyć $\xi(t)$ i $y(t)$.