Teoria regulacji – Lista 8

Transformacja $\mathcal{Z}$ i jej własności*

Maciej Filiński

Zadanie 1. Zweryfikować następujące własności transformacji $\mathcal{Z}$:

a) $x_{n+1} \hat{=} zX(z) - zx_0$

b) $\sum_{i=0}^{n} x_i \hat{=} \frac{z}{z-1} X(z)$

c) $nx_n \hat{=} -z\frac{d}{dz}X(z)$

d) $\lambda^n x_n = X(\lambda z)$

e) $\sum_{i=0}^{n} x_{n-i} y_i \hat{=} X(z)Y(z)$

f) $x_{n-1} \hat{=} z^{-1}X(z) + x_{n-1}$

Na podstawie definicji wyznaczyć transformatę dyskretnego impulsu Diraca δ_n, a następnie - korzystając z tych własności - transformaty następujących funkcji 1_n, n, n^2, λ^n, $n\lambda^n$, $n^2\lambda^n$, $\sin(\omega n)$, $\cos(\omega n)$, $\lambda^n \sin(\omega n)$, $n\sin(\omega n)$, $n^2 \sin(\omega n)$ oraz $n\cos(\omega n)$.

Zadanie 2. Rozwiązać równanie różnicowe:

a) $y_n + 5y_{n-1} + 6y_{n-2} = u_n + 3u_{n-1}$, gdzie $y_{-1} = 2$, $y_{-2} = 3$ oraz $u_n = \delta_n$

b) $y_n + 2y_{n-1} + y_{n-2} = 2u_n + u_{n-2}$, gdzie $y_{-1} = 0$, $y_{-2} = 1$ oraz $u_n = \delta_n$

c) $y_n + 3y_{n-1} - y_{n-2} = u_n$, gdzie $y_{-1} = 0$, $y_{-2} = 0$ oraz $u_n = \delta_n$

d) $y_n - 2y_{n-1} + 3y_{n-2} = u_{n-1} + 3u_{n-2}$, gdzie $y_{-1} = 2$, $y_{-2} = 3$ oraz $u_n = \delta_n$

e) $y_n + 6y_{n-2} = u_n + u_{n-1} + u_{n-2}$, gdzie $y_{-1} = 1$, $y_{-2} = 1$ oraz $u_n = \delta_n$

f) $y_n + y_{n-1} - 4y_{n-2} = -u_n + u_{n-1}$, gdzie $y_{-1} = 0$, $y_{-2} = 0$ oraz $u_n = \delta_n$

*Na podstawie list Prof. dr hab. Włodzimierza Greblickiego

g) $y_n - y_{n-1} = u_{n-1}$, gdzie $y_{-1} = 2$ oraz $u_n = \delta_n$

h) $y_n + 2y_{n-1} - y_{n-2} = u_n + \frac{1}{2}u_{n-1}$, gdzie $y_{-1} = 1$, $y_{-2} = 1$ oraz $u_n = 1_n$

i) $y_n + 3y_{n-1} - 3y_{n-2} = u_n - u_{n-1}$, gdzie $y_{-1} = -2$, $y_{-2} = -3$ oraz $u_n = 1_n$

j) $y_n - 3y_{n-1} + 2y_{n-2} = u_n - 3u_{n-1}$, gdzie $y_{-1} = -1$, $y_{-2} = \frac{1}{2}$ oraz $u_n = 1_n$

Zadanie 3. Wyznaczyć odpowiedź impulsową i skokową systemu o transmitancji

a) $K(z) = \frac{1}{(z+1)(z+3)}$

b) $K(z) = \frac{1}{(z+1)^2(z+3)}$

c) $K(z) = \frac{z}{(z+1)(z+2)}$

d) $K(z) = \frac{z^2+3}{(z+1)(z+2)}$

e) $K(z) = \frac{z}{3z+2}$

f) $K(z) = \frac{1}{3z+2}$

g) $K(z) = \frac{z}{(3z+2)(4z-3)}$

h) $K(z) = \frac{1}{(z+1)(z+3)(z+2)}$

i) $K(z) = \frac{z^2+1}{(z+1)^2(z+3)}$

j) $K(z) = \frac{z}{(2z+1)(2z-3)}$

k) $K(z) = \frac{z^2+z}{(z+1)(z+3)}$

l) $K(z) = \frac{z}{(z-1)(z-\frac{1}{2})}$

m) $K(z) = \frac{2}{(z-1)(z+4)}$

n) $K(z) = \frac{2z+1}{(2z+3)(z-3)}$

o) $K(z) = \frac{z-2}{(z-1)(z+1)}$

p) $K(z) = \frac{2z+3}{(2z+1)(4z+3)}$

q) $K(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$

r) $K(z) = \frac{z+2}{(z+1)(z+3)}$

s) $K(z) = \frac{1}{(z+1)^2(z-2)}$

t) $K(z) = \frac{1}{(5z+1)(5z+3)}$