Inżynierskie zastosowanie statystyki – Ćwiczenia

Lista 1

Maciej Filiński

1 Wstęp teoretyczny

1.1 Rozkład dyskretny

Jeśli X jest dyskretną zmienną losową o wartościach $x_1, x_2, \ldots, x_n$, wówczas funkcja masy prawdopodobieństwa ma następujące własności:

$$f(x_i) \geqslant 0 \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^{N} f(x_i) = 1 \tag{2}$$

$$f(x_i) = P(X = x_i) \tag{3}$$

Dystrybuanta $F(x)$ rozkładu zmiennej losowej dyskretnej X dana jest wzorem

$$F(x) = P(X \leqslant x) = \sum_{x_i \leqslant x} f(x_i), \tag{4}$$

gdzie f jest funkcją masy prawdopodobieństwa. Własności dystrybuanty dyskretnej są następujące:

1. $P(X = x_i) = F(x_i^+) - F(x_i)$, gdzie $F(x_i^+)$ oznacza granicę prawostronną w punkcie x_i
2. $0 \leqslant F(x) \leqslant 1$, $x \in \mathbb{R}$
3. $F(x)$ jest funkcją skokową i niemalejącą

1.2 Rozkład ciągły

Jeśli X jest ciągłą zmienną losową, wówczas gęstości ma następujące własności:

$$f(x) \geqslant 0 \tag{5}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) = 1 \tag{6}$$

$$P(a \leqslant X \leqslant b) = \int_a^b f(x)dx. \tag{7}$$

Jeśli X jest ciągłą zmienną losową wówczas dla dowolnej realizacji x tej zmiennej $P(X = x) = 0$

Jeśli $f(x)$ jest gęstością rozkładu prawdopodobieństwa, to funkcję określoną wzorem

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du, x \in \mathbb{R}, \tag{8}$$

nazywamy dystrybuantą rozkładu ciągłego. Własności dystrybuanty ciągłej są następujące:

1. $\frac{d}{dx}F(x) = f(x)$
2. $0 \leqslant F(x) \leqslant 1$, $x \in \mathbb{R}$
3. $F(x)$ jest ciągła i niemalejąca

2 Lista zadań

1. Niech $f(x) = \frac{2x+1}{25}, x = 0, 1, 2, 3, 4,$
   (a) Sprawdź czy funkcja $f(x)$ jest funkcją masy prawdopodobieństwa.
   (b) Oblicz $P(X = 4)$
   (c) Oblicz $P(X =\leqslant 1)$
   (d) Oblicz $P(2 \leqslant X < 4)$
   (e) Oblicz $P(X > -10)$

(f) Oblicz $P(X \leqslant 0)$

(g) Oblicz $P(X < 0)$

2. Optyczny system kontroli ma za zadanie rozróżnienie pomiędzy różnymi typami części. Prawdopodobieństwo prawidłowej klasyfikacji każdej części jest równe 0.98. Załóżmy, że trzy części są sprawdzane i że klasyfikacje są niezależne. Niech zmienna losowa X oznacza liczbę części, które zostały prawidłowo zaklasyfikowane. Określ funkcję masy prawdopodobieństwa X.

3. Zespół składa się z trzech elementów mechanicznych. Załóżmy, że prawdopodobieństwo, że pierwszy drugi i trzeci element spełnia wymagania są odpowiednio równe 0.94, 0.98 i 0.99. Załóżmy, że elementy są niezależne. Określ funkcję masy prawdopodobieństwa liczby komponentów w zespole, które spełniają wymagania.

4. Prawdopodobieństwo tego, że statystyczny student nie jest przygotowany do ćwiczeń, jest równe $\frac{1}{3}$. Prowadzący ćwiczenia wybiera przypadkowe 4 osoby. Niech X oznacza liczbę osób spośród wybranych, które nie są przygotowane do ćwiczeń. Znaleźć:

   (a) $P(X = 3)$

   (b) $P(X = 0)$

   (c) $P(X < 2)$

5. Inżynier obsługuje cztery jednakowe maszyny niezależne od siebie. Prawdopodobieństwo, że automat będzie wymagał interwencji wynosi 0.2. Oblicz prawdopodobieństwo, że pracownik będzie musiał naprawić więcej niż jedną maszynę.

6. Zmienna losowa X, dla której $P(X = x_i) = p_i$ ma rozkład podany w tabeli

x_i	1	2	3	6	7	8
p_i	0.1	0.1	0.2	0.3	0.05	p

Wyznacz parametr p, narysuj dystrybuantę wyznacz wartość oczekiwaną i wariancję, oblicz prawdopodobieństwo $P(2.5 \leqslant X < 7)$.

7. Zmienna losowa X ma dystrybuantę $F(x)$ następującej postaci:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leqslant 1 \\ 0.5 & 1 < x \leqslant 3 \\ p & x > 3 \end{cases}$$

   (a) Wyznacz wartość parametru p

   (b) Wyznacz funkcję masy prawdopodobieństwa zmiennej losowej X

   (c) Oblicz prawdopodobieństwo $P(1 \leqslant X \leqslant 2)$

   (d) Oblicz EX i D^2X

8. Niech ciąga zmienna losowa X oznacza natężenie prądu w miliamperach mierzone w cienkim drucie miedzianym. Załóżmy, że zakres X to $[0, 20]$ i funkcja gęstości prawdopodobieństwa jest dana wzorem $f(x) = 0.05$. Jakie jest prawdopodobieństwo, że natężenie prądu jest:

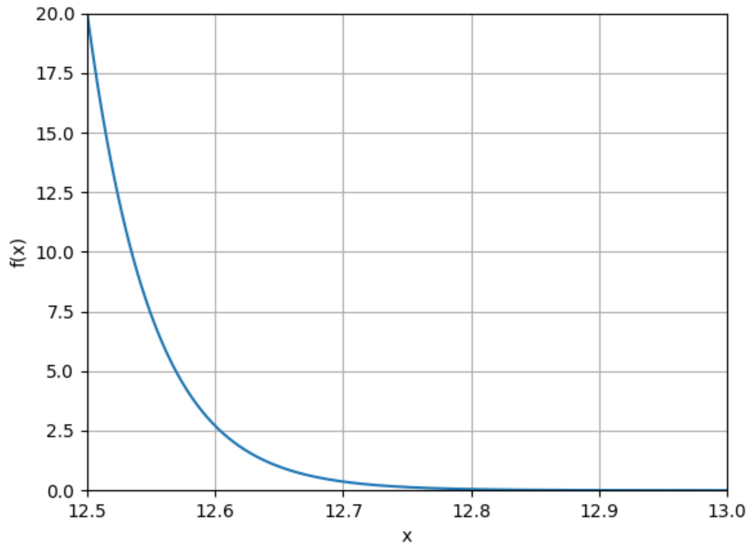
   (a) mniejsze niż 10 mA

   (b) większe niż 15 mA

   (c) równe 10 mA

   (d) w przedziale $[9.9, 10.1]$ mA

9. Niech ciągła zmienna losowa X oznacza średnicę otworu wywierconego w arkuszu blachy. Średnica docelowa wynosi 12.5 mm. Większość losowych zakłóceń procesu skutkuje większymi średnicami. Dane historyczne wskazują, że rozkład X może być modelowany za pomocą funkcji gęstości $f(x) = 20e^{-20(x-12.5)}$, $12.5 \leqslant x$. Jeśli blachy z otworem o średnicy większej niż 12.6 mm są złomowane, jaki procent arkuszy trafia na złom? Funkcja gęstości przedstawiona jest na rysunku poniżej.



10. Niech funkcja $f(x) = \frac{x}{8}$, $3 \leqslant x \leqslant 5$ będzie funkcją gęstości prawdopodobieństwa. Wyznacz prawdopodobieństwo:

    (a) $P(X < 4)$

    (b) $P(X > 3.5)$

    (c) $P(4 < X < 5)$

    (d) $P(X < 3.5 \vee X > 4.5)$

11. Niech funkcja $f(x) = -\frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{4}$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$ będzie funkcją gęstości prawdopodobieństwa. Wyznacz prawdopodobieństwo:

    (a) $P(X < 0.2)$

    (b) $P(X > 0.5)$

    (c) $P(X > 0)$

    (d) $P(|X| < 0.1)$

12. Wyznacz funkcję gęstości prawdopodobieństwa ciągłej zmiennej losowej X, której

dystrybuanta dana jest wzorem

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leqslant 0 \\ 0.2x & 0 < x \leqslant 4 \\ 0.04x + 0.64 & 4 < x \leqslant 9 \\ 1 & x > 9 \end{cases}$$

13. Funkcja gęstości zmiennej losowej X dana jest wzorem $f(x) = 0.5x - 1$ dla $2 < x \leqslant 4$.

    (a) Oblicz dystrybuantę i ją narysuj, a następnie wyznacz prawdopodobieństwo $P(X < 2.5)$

    (b) Wyznacz wartość oczekiwaną i wariancję zmiennej losowej X