Inżynierskie zastosowanie statystyki – Ćwiczenia

Lista 2

1 Wstęp teoretyczny

1.1 Wskaźniki położenia

1. Średnia arytmetyczna
$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \tag{1}$$
2. Mediana
$$m_e = \begin{cases} \frac{1}{2}(x_{n/2} + x_{n/2+1}) \\ x_{(n+1)/2} \end{cases} \tag{2}$$
3. Moda – najczęściej powtarzająca się wartości, o ile istnieje, nie będąc x_{min} i x_{max}

1.2 Wskaźniki rozproszenia (skali)

1. Rozstęp próby
$$R = x_{max} - x_{min} \tag{3}$$
2. Wariancja
$$s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \hat{x})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \hat{x}^2 \tag{4}$$
3. Odchylenie standardowe
$$s = \sqrt{s^2} \tag{5}$$

4. Kwartyl górny – Q_3 mediana zbioru elementów większych równych m_e

5. Kwartyl dolny – Q_1 mediana zbioru elementów mniejszych równych m_e

6. Rozstęp międzykwartylowy
$$IQR = Q_3 - Q_1 \tag{6}$$

1.3 Estymacja punktowa

1. Estymator wartości oczekiwanej
$$\hat{\mu} = \hat{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \tag{7}$$

2. Estymator wariancji
$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \hat{x})^2 \tag{8}$$

1.4 Rozkład Normalny

Kwantylem stopnia p, który oznacza,y przez q_p, nazywamy argument, dla którego wartość dystrybuanty jest równa p. Poniższe definicje są równoważne:

$$F(q_p) = p \tag{9}$$
$$\int_{-\infty}^{p} f(u)du = p \tag{10}$$
$$\int_{p}^{\infty} f(u)du = 1 - p \tag{11}$$

Rozkład normalny ma gęstość prawdopodobieństwa
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right), \tag{12}$$
gdzie μ oznacza wartość oczekiwaną, a σ^2 wariancję.

Standaryzowany rozkład normalny $\mathcal{N}(0,1)$ to rozkład normalny o zerowej wartości średniej i wariancji równej 1. Dystrybuanta standaryzowanego rozkładu normalnego oznaczana jest przez $\Phi(x)$, natomiast funkcja gęstości prawdopodobieństwa $\phi(x)$.

Własności:

- Rozkład jest symetryczny względem swojej wartości średniej, więc:

$$\phi(-x) = 1 - \phi(x) \tag{13}$$

- Dla dowolnego rozkładu normalnego $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ o dystrybuancjie $F(x)$

$$F(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \tag{14}$$

2 Lista zadań

1. W konstrukcjach lotniczych zapobieganie propagacji pęknięć wynikających ze zmęczenia obciążanych wingboxów (łączniki pomiędzy kadłubem, a skrzydłem samolotu) dała następujące wyniki (w mm): Oblicz:

   2.13 2.96 3.02 1.82 1.15 1.34 2.04 2.47 2.60

   (a) Wskaźniki położenia
   (b) Wskaźniki rozproszenia
   (c) Wyznacz wartość estymatorów wartości oczekiwanej i wariancji

2. Dla rozkładu normalnego $\mathcal{N}(2, 9)$ znajdź $F(5)$, $F(-1)$ oraz kwantyl rzędu 0.95.

3. Niech $F(x)$ będzie dystrybuantą rozkładu normalnego $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, $\mu \in \mathbb{R}, \sigma \in \mathbb{R}_+$. Korzystając z własności rozkładu normalnego wyprowadź wzór na prawdopodobieństwa $P(X \in (\mu - a, \mu + a))$, gdzie $a \in \mathbb{R}_+$.

4. Zakładając, że pomiar ma rozkład normalny o wartości średniej $\mu = 123.4$ i wariancji $\sigma^2 = 25$, oblicz prawdopodobieństwo tego, że będzie on:

   (a) mniejszy od 120,
   (b) większy od 135,
   (c) w granicach 117.4 i 129.4