Inżynierskie zastosowanie statystyki – Ćwiczenia

Lista 4

1 Wstęp teoretyczny

W testach do weryfikacji hipotezy o wartości przeciętnej $H_0 : \mu = \mu_0$ wykorzystujemy statystykę $\bar{X}$, czyli średnią arytmetyczną próby.

1.1 Model

Badana cecha X populacji ma rozkład $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ przy znanej wariancji σ^2. Statystyka testowa:

$$U = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n}, \tag{1}$$

przy założeniu prawdziwości hipotezy $H_0 : \mu = \mu_0$ ma rozkład $\mathcal{N}(0, 1)$.

1.2 Procedura testowania

1. Wskaż parametr, którego dotyczy test,
2. Postaw hipotezę zerową,
3. Postaw hipotezę alternatywną,
4. Ustal poziom istotności α,
5. Wskaż statystykę testową,

6. Wyznacz odpowiednie kwantyle i wskaż obszar krytyczny dla testu,
7. Oblicz wartość statystyki,
8. Zdecyduj czy hipoteza zerowa powinna zostać odrzucona.

2 Lista zadań

1. Analizowana jest wydajność pewnego procesu chemicznego. Zalecane jest, aby średnia wydajność procesu była nie mniejsza niż 90%. Wiadomo, że odchylenie standardowe wydajności populacji jest równe $\sigma = 3$, wydajność ma rozkład normalny i próba zawierająca n = 5 obserwacji daje następujące wartości wydajności: 91.6%, 88.75%, 90.8%, 89.95% i 91.3%. Przyjmijmy poziom istotności $\alpha = 0.05$. Czy wydajność procesu jest zgodna z oczekiwaniami?

2. Zgodnie ze specyfikacją, średnie spalanie paliwa stałego służącego do zasilania systemów ewakuacyjnych w samolotach powinno wynosić $50\frac{cm^3}{s}$. Wiadomo, że tempo spalania paliwa stałego można przybliżyć za pomocą rozkładu normalnego, oraz, że odchylenie standardowe wynosi $\sigma = 2\frac{cm^3}{s}$. Na potrzeby testu ustalono poziom istotności $\alpha = 0.05$, wybrano próbę $n = 25$ elementową samolotów pewnego typu i obliczono średnie spalanie z próby $\bar{x} = 51.3\frac{cm^3}{s}$. Czy spalanie paliwa stałego w tego typu samolotach jest zgodne ze specyfikacją?

3. Fabryka produkuje wały korbowe do silników samochodowych. Zużycie wału korbowego po $150000km$ powinno być nie większe niż $7.62\mu m$, w przeciwnym przypadku fabryka może spodziewać się roszczeń gwarancyjnych. Wybrano próbę losową $n = 15$ wałów korbowych i na jej podstawie obliczono średnie zużycie $\bar{x} = 7\mu m$. Wiadomo, że $\sigma = 2.3\mu m$ i że zużycie ma rozkład normalny. Czy zużycie wałów korbowych produkowanych w tej fabryce jest zgodne ze specyfikacją?

4. Zgodnie ze specyfikacją średni punkt topnienia pewnego spoiwa powinien być równy 68.3^oC. Analiza $n = 10$ próbek tego spoiwa dała średnią $\bar{x} = 67.9^oC$.

Załóżmy, że punkt topnienia ma rozkład normalny z odchyleniem standardowym $\sigma = 17^oC$. Czy średni punkt topnienia tego spoiwa jest zgodny ze specyfikacją na poziomie istotności $\alpha = 0.01$?

5. Wiadomo, że żywotność baterii ma w przybliżeniu rozkład normalny z odchyleniem standardowym $\sigma = 1.25h$. Wybrano próbę $n = 10$ baterii. Średnia żywotność baterii w próbie wyniosła $\bar{x} = 40.5h$.

   (a) Czy mamy wystarczające dowody na to, że średnia żywotność baterii jest inna niż $40h$? Niech $\alpha = 0.05$.

   (b) Ile wynosi prawdopodobieństwo popełnienia błędu I rodzaju w tym teście?

   (c) Ile wynosi prawdopodobieństwo popełnienia błędu II rodzaju w tym teście jeżeli średnia żywotność baterii jest w rzeczywistości równa $\mu = 42h$?

6. Zgodnie z informacją podaną przez producenta średni zasięg pewnego samochodu elektrycznego to $80km$. Wylosowano próbę $n = 5$ samochodów i przetestowano na torze testowym w tych samych warunkach. Średni zasięg otrzymany z próby wyniósł $76.5km$. Załóżmy, że średni zasięg ma rozkład normalny z wariancją równą $\sigma^2 = 9km$. Czy mamy dowody na to, że producent podaje nieprawdziwe informacje?

7. Przyjmując, że średnice śrub pochodzących z masowej produkcji mają rozkład normalny, w którym $\sigma = 0.1mm$ jest znane, zweryfikować hipotezę $H(m = 8mm)$, tzn. że przeciętna długość średnicy wynosi $8mm$, na podstawie następujących wyników pomiarów 9 przypadkowo wybranych śrub: $8.1, 8.2, 7.9, 7.8, 8, 8, 8.1, 8.1, 8$. Przyjmując poziom istotności $\alpha = 0.01$ i $\alpha = 0.05$.

8. Zużycie energii elektrycznej przez pewien zakład przemysłowy w 10 kolejnych dniach $(104, 100, 105, 110, 106, 105, 102, 107, 106, 105)$. Zakładając, że zużycie energii ma rozkład normalny, zweryfikować hipotezę $H(m = 105)$, dla $\sigma^2 = 4$ przy poziomie istotności $\alpha = 0.1$ i $\alpha = 0.05$.

9. Według normy technologicznej czas wykonywania pewnej obróbki powinien wynosić 9 min. Wykonano 10 stanowisk roboczych, na których jest wykonywana ta obróbka na identycznych obrabiarkach. Każdą obrabiarkę obsługuje inny robotnik. Otrzymano następujące dane liczbowe (w min): $11.5, 12, 10.5, 8.5, 11, 9.5, 9, 8.5, 10, 9.5$. Z poprzednich badań wiadomo, że odchylenie standardowe czasu obróbki $\sigma = 2.5 min$. Zakładając, że czas obróbki jest zmienną losową o rozkładzie normalnym i przyjmując poziom istotności $\alpha = 0.05$, zweryfikować hipotezę $H(m = 9)$. Powtórzyć dla poziomów istotności: $\alpha = 0.1$ i $\alpha = 0.01$.

10. sprawdzić hipotezy:

    a) $H_0 : \mu = 10$ i $H_0 : \mu > 10$ dla $\sigma = 0.1$, $\bar{x}_{25} = 10.2$, $\alpha = 0.1$

    b) $H_0 : \mu = 10$ i $H_0 : \mu < 10$ dla $\sigma = 0.5$, $\bar{x}_{81} = 9.4$, $\alpha = 0.05$

    c) $H_0 : \mu = 8$ i $H_0 : \mu \neq 10$ dla $\sigma = 0.1$, $\bar{x}_9 = 10.2$, $\alpha = 0.1$

    d) $H_0 : \mu = 25$ i $H_0 : \mu > 25$ dla $\sigma = 3$, $\bar{x}_{25} = 24$, $\alpha = 0.01$

    e) $H_0 : \mu = 0$ i $H_0 : \mu \neq 0$ dla $\sigma = 10$, $\bar{x}_{100} = 3.4$, $\alpha = 0.1$

    f) $H_0 : \mu = 0$ i $H_0 : \mu \neq 0$ dla $\sigma = 10$, $\bar{x}_{100} = 3.4$, $\alpha = 0.05$