Inżynierskie zastosowanie statystyki – Ćwiczenia

Lista 5

1 Wstęp teoretyczny

W testach do weryfikacji hipotezy o wartości przeciętnej $H_0 : \mu = \mu_0$ wykorzystujemy statystykę $\bar{X}$, czyli średnią arytmetyczną próby. Jeżeli wariancja rozkładu cechy w populacji generalnej σ^2 nie jest znana, zastępujemy ją wartością estymatora wariancji

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1} (x_i - \bar{x})^2 \tag{1}$$

1.1 Model

1. Badana cecha X populacji ma rozkład $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ przy nieznanej wariancji σ^2. Statystyka testowa:
$$t = \frac{\bar{X} - \mu_0}{s} \sqrt{n}, \tag{2}$$
przy założeniu prawdziwości hipotezy $H_0 : \mu = \mu_0$, ma rozkład Studenta o $v = n - 1$ stopniach swobody ($t_v = t_{n-1}$)

2. Badana cecha X populacji ma rozkład dowolny o nieznanej wartości średniej μ i nieznanej wariancji σ^2 oraz n jest duże ($n \geqslant 100$). Statystyka testowa:
$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{s} \sqrt{n}, \tag{3}$$
przy założeniu prawdziwości hipotezy $H_0 : \mu = \mu_0$, ma asymptotyczny rozkład normalny $\mathcal{N}(0, 1)$

1.2 Procedura testowania

1. Wskaż parametr, którego dotyczy test,
2. Postaw hipotezę zerową,
3. Postaw hipotezę alternatywną,
4. Ustal poziom istotności α,
5. Wskaż statystykę testową,
6. Oblicz wartość statystyki,
7. Oblicz p-wartość,
8. Zdecyduj czy hipoteza zerowa powinna zostać odrzucona.

p-wartość (p-value) - prawdopodobieństwo, że przy prawdziwości hipotezy zerowej statystyka testowa przyjmuje wartość bardziej ekstremalną niż ta, która została zaobserwowana.

2 Lista zadań

1. Kwantyle rozkładu Studenta oznaczane są przez $t_{p;v}$ gdzie p oznacza rząd kwantyla a v liczbę stopni swobody rozkładu. Oczytaj z tablicy rozkładu Studenta wartości kwantyli:

   (a) $t_{0.025;15}$
   (b) $t_{0.05;10}$
   (c) $t_{0.1;20}$
   (d) $t_{0.005;25}$
   (e) $t_{0.025;15}$
   (f) $t_{0.01;10}$
   (g) $t_{0.1;10}$
   (h) $t_{0.05;20}$
   (i) $t_{0.1;15}$

2. Testowana jest hipoteza $H_0 : \mu = 5$ przeciwko:

   (a) $H_1 : \mu \neq 5$ (b) $H_1 : \mu > 5$ (c) $H_1 : \mu < 5$

   na podstawie 20-elementowej próby. Niech $\bar{X} = 4.5$, $s^2 = 1.44$. Odczytaj p-wartość dla każdej z trzech par hipotez.

3. W celu oszacowania zanieczyszczenia rtęcią u karpi pobrano próbę 144 karpi ze stawów hodowlanych na Dolnym Śląsku i zmierzono zawartość rtęci w tkance mięśniowej każdej z ryb. Średnia arytmetyczna zawartości rtęci wynosi $\bar{x} = 2.3635$, a odchylenie standardowe z próby $s = 0.7076$. Zgodnie z normą stężenie rtęci u karpia nie powinno przekraczać $2.5 \frac{\mu g}{100g}$. Czy na poziomie istotności $\alpha = 0.05$ średnie stężenie rtęci u dolnośląskich karpi nie przekracza normy? Oblicz p-wartość dla tego testu.

4. Poddano badaniu zawartość sodu w $n = 30$ 300-gramowych paczkach płatków kukurydzianych. Na podstawie danych (w mg) obliczono średnią z próby $\bar{x} = 129.7527$ oraz wariancję z próby $s^2 = 0.86371$. Czy można twierdzić, że paczka płatków kukurydzianych tej marki zawiera średnio 130 mg sodu? Oblicz p-wartość dla tego testu.

5. Zmierzono wytrzymałość 10 losowo wybranych gotowych elementów konstrukcji budowlanych i otrzymano następujące wyniki (w MPa): 383, 284, 339, 340, 305, 386, 378, 335, 344, 346. Zakładając, że rozkład wytrzymałości tych elementów jest rozkładem $\mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$ o nieznanych parametrach, przetestuj hipotezę zerową $H_0 : \mu = 340$ przeciwko hipotezie alternatywnej $H_1 : \mu < 340$ na poziomie istotności 0:05. Oblicz p-wartość dla tego testu.